Feuille de TD 10 - Courbes paramétrées

Questions du cours. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle réel, et C la courbé paramétrée par $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

(a) Donner la définition de point régulier d'une courbe paramétrée.

(b) Donner l'équation de la droite tangente à C en un point régulier $t_0 \in I$ de γ.

(c) Donner la définition de point singulier (ou stationnaire) d'une courbe paramétrée.

(d) Définir quand γ a une branche infinie au voisinage de $t_0 \in \overline{I}$.

(e) Donner la définition de asymptote (horizontale, verticale, oblique).

(f) Donner la définition de branche (infinie) parabolique (dans une direction donnée).

(g) Donner la définition de points d'inflection, d'allure ordinaire, de rebroussement de première et deuxième espece.

Exercice 1. (a) Tracer la courbe C paramétrisée par $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t)$, et la courbe paramétrisée par $\gamma_2(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$.

(b) Donner une période de courbe D paramétrisée par $\delta(t) = (\cos(2t), \sin(3t))$.

(c) Calculer l'intersection $C \cap D$.

Exercice 2. Trouver l'équation cartésienne de la courbe paramétrisée par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, où :

(a) $x(t) = \sin^2(t)$, $y(t) = 1 + \cos(2t)$.

(b) $x(t) = t^2$, $y(t) = -2 \ln t$.

(c) $x(t) = t^2$, $y(t) = t^3$.

(d) $x(t) = \cos t$, $y(t) = \frac{\sin^2(t)}{2-\sin t}$.

Exercice 3. Soit C la courbe paramétrisée par $\gamma(t) = \left(\frac{e^{-t}-1}{t}, \frac{\ln(1+t)}{t}\right)$.

(a) Déterminer le domaine de définition de γ.

(b) Est-ce que γ s'étend à une fonction continue aux bornes de ce domaine ?

Exercice 4. Soit C la courbe paramétrée par $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, avec $\gamma(t) = \left(t + \frac{1}{t}, t^2\right)$.

(a) Calculer le domaine de la paramétrisation.

(b) Montrer que tout $t \in \mathbb{R}^*$ est un point régulier de γ. Calculer l'équation de la tangente à C en $\gamma(2)$, et en $(x_0, y_0) = (-2, 1)$.

(c) Montrer que pour $t \to 0^-, 0^+$ on a des asymptotes, et en calculer les équations.

(d) Montrer que pour $t \to -\infty, +\infty$, on a des branches paraboliques.

(e) Trouver une équation cartésienne pour la courbe C paramétrée par γ.

(f) Dessiner C.

Exercice 5. Soit C la courbe paramétrée par $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, avec $\gamma(t) = \left(t - \frac{1}{t(t-1)}, -2t + \frac{1}{t}\right)$.

(a) Calculer le domaine de la paramétrisation.

(b) Montrer que tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ est un point régulier de γ. Calculer l'équation de la tangente à C en $\gamma(-1)$.

(c) Montrer que pour $t \to 0^\pm, 1^\pm, \pm\infty$ on a des asymptotes, et en calculer les équations.

(d) Dessiner l'allure de C.

Exercice 6. Soit C la courbe paramétrée par $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, avec $\gamma(t) = \left(t \arctan t, \pi t + \frac{1}{t}\right)$.

(a) Calculer le domaine de la paramétrisation.
(b) Décrire les types de branches à l'infini.
(c) Dessiner l'allure de C.

Exercice 7. Soit C la courbe paramétrée par $\gamma\colon]-\infty,1[\to \mathbb{R}^2$, avec $\gamma(t) = \big(t\sin t, \frac{t^2}{(1-t)}\big)$.
(a) Etudier les branches à l'infini de C.
(b) Montrer que C est contenue dans $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y \geq |x|\}$.
(c) Montrer que la courbe C admet un point de rebroussement de type 1 en $\gamma(0)$.
(d) Calculer l'équation de la tangente à C en $\gamma(0)$.

Exercice 8 (Ellipses et Astroïde)**.** Soient $a, b > 0$.
(a) Montrer que $\varepsilon(t) = (a\cos t, b\sin t)$ paramétrise un ellipse de semiaxes a et b. En donner l'équation cartésienne.

Considerons maintenant la famille d'ellipses E_a de semiaxes a et $1-a$, avec $a\in[0,1]$. Soit C la courbe paramétrisée par $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$.
(b) Analyser les symétries et la périodicité de γ.
(c) Montrer que la courbe C a 4 points de rebroussement, et les étudier localement.
(d) Montrer que la courbe C est tangente à E_a pour tout $a\in[0,1]$.
(e) Déduire du point précédent que C est obtenue comme bord de l'enveloppe convexe de la famille $\{E_a \mid a\in[0,1]\}$.

Exercice 9. Soient $a, b > 0$.
(a) Montrer que $\delta(t) = \big(a\cosh(t), b\sinh(t)\big)$ paramétrise une hyperbole avec axes coordonnés. En donner l'équation cartésienne associée.
(b) Déterminer les asymptotes de δ.

Exercice 10. Etudier au voisinage du point de paramètre t_0 indiqué, l'allure des courbes paramétrés $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ suivantes :
(a) $x(t) = t^2$, $y(t) = t^2 - t^3$, au point $t_0 = 0$.
(b) $x(t) = t^2 + 3t^5$, $y(t) = t^4$, au point $t_0 = 0$.
(c) $x(t) = e^{t-1} - t$, $y(t) = t^3 - 3t$, au point $t_0 = 1$.
(d) $x(t) = t\cos t$, $y(t) = t\sin t$, au point $t_0 = 0$.
(e) $x(t) = t^2\sin t$, $y(t) = t\cos t$, au point $t_0 = 0$.
(f) $x(t) = e^{\cos t}$, $y(t) = e^{\sin t}$, au point $t_0 = 0$.
(g) $x(t) = e^{2t}$, $y(t) = e^{-t^2}$, au point $t = 0$.
(h) $x(t) = \cos t$, $y(t) = \frac{\sin^2(t)}{2-\sin t}$, au point $t_0 = \pi$.

Exercice 11. Pour les courbes paramétrées $\gamma\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ suivantes, étudier le domaine de définition, l'éventuelle périodicité ou les symétries, les points singuliers, et les branches à l'infini. Enfin, dessiner l'allure de la courbe.
(a) Cycloïde : $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 1 - \cos t$.
(b) Astroïde : $x(t) = \cos^3 t$, $y(t) = \sin^3 t$.
(c) Bicorne : $x(t) = \cos t$, $y(t) = \frac{\sin^2 t}{2-\sin t}$.
(d) Folium de Descartes : $x(t) = \frac{3t}{1+t^3}$, $y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}$.
(e) Cissoïde (droite) : $x(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$, $y(t) = \frac{t^3}{1+t^2}$.
(f) Courbe de Lissajoux : $x(t) = \sin(2t)$, $y(t) = \sin(3t)$.
(g) Strophoïde (droite) : $x(t) = \frac{t^2-1}{t^2+1}$, $y(t) = \frac{t^3-t}{t^2+1}$.
(h) Cardioïde : $x(t) = 1 - 2\cos t + \cos(2t)$, $y(t) = 2\sin t - \sin(2t)$.
(i) Courbe du diable : $x(t) = r(t)\cos t$, $y(t) = r(t)\sin t$, avec $r(t) = \sqrt{\frac{2\cos^2 t - \sin^2 t}{\cos^2 t - \sin^2 t}}$.